



TITLE:

球面上のロスビー波伝播と角運動量輸送(流体における波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

林, 洋介

CITATION:

林, 洋介. 球面上のロスビー波伝播と角運動量輸送(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 830: 146-156

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83348>

RIGHT:

球面上のロスビー波伝播と角運動量輸送

東大理学部 林 祥介 (Yoshi-Yuki Hayashi)¹

1 はじめに

惑星大気(海洋)の流れの形態を大雑把にとらえる特徴は, 縞々の存在と渦の存在であるといつてよいであろう. ロスビー波は, 角運動量分配に関与することによりこのうちの前者, すなわち, 縞々がどのように形成維持されているかという問題に関わってくるのである. 縞々の実体となっているのは対流運動, 例えば地球でいえばハドレー循環, であるわけなのだが, 大気は回転系上にあるので, その熱的状況は角運動量分布の状況と分けて考えることができない. したがって, 例えば, 縞の数がいくつになるべきかを考えること, すなわち, 対流セルがいくつあるべきかということを考察することは, 東西風のジェットが何本あるべきかという問題を考察するのと同じことになるわけで

¹連絡先 〒113 文京区弥生 2-11-16, 東京大学理学部地球惑星物理学科
E-mail: shosuke@geoph.s.u-tokyo.ac.jp

ある。

さて、以下では回転系の熱対流の議論を行なうのではなく、さらに抽象化した世界、すなわち、2次元非発散球面系での角運動量分布とそこでのロスビー波の役割について議論する。縞々問題、あるいは、角運動量分配問題に関与するであろう特定の力学過程を選択抽出し、その特性をあらかじめよく掌握しておこうというわけである。厳密な計算が不可能である大気の運動構造に対して何らかの洞察を得ることが目論みである。

2次元非発散系を用いて議論をすすめることは、惑星大気の運動が基本的には安定成層のもとで起こっている、とする偏見に基づいている。成層の結果、運動は渦位に支配され、鉛直流が縦横比に比べて小さい準2次元形的形態をとることになる。この偏見は地球大気や海洋について得られた知見に基づいているのであり、惑星大気一般に対しては必ずしも自明の前提ではない。実際、Busse らの一連の研究に知られるように (例えば Busse 1983) 成層が第一近似では無視できる、という偏見から出発することも同等に可能である。残念ながら、関与するであろう特定の力学過程を選択する理由はなく、十分簡単な系がいくつかあって、各々がその好みにあった系を考察する、というのがこの問題のアプローチとしていわば承認されている。ここでは、2次元非発散系を惑星大気循環という見地からも理解す

るに値する系であると信じて出発することにする.

2 回転球面上の 2 次元流問題

球面上のロスビー波の伝播が, 気象擾乱として明瞭に可視化されたのはさほど昔のことではない. 全球観測網の整備と計算機能力の向上により流れ場の相関を全球規模でとることができるようになった 1970 年代の終りである (例えば Wallace and Gutzler, 1981). したがって, ロスビー波による南北方向の角運動量輸送を明瞭に意識しはじめたのも 1980 年代以降, ということになる. 波動による角運動量輸送の問題それ自体は 1960 年代から, 特に成層圏の循環を議論するために精力的になされてきたのではあるが, 南北方向の輸送をも視野に入れて考察することはあまりなかった.

回転球面上で 2 次元非発散場をランダムに強制し, 角運動量分布の時間発展を計算した Williams (1978) の実験は非常に先進的ではある. しかし当時としては計算資源がよほど恵まれていない限り追従不可能な世界であり, 衆人によって解の構造が議論されることはなかった. Williams の結果は, 木星パラメターを用いた場合には縞々, 地球パラメターを用いた時には縞があまりない, という, 観測に整合的なものであったのだが, 残念ながらその構造を考察するには至っていない. 結局, 回転球

面上でのランダムな 2 次元流がどのような性質を持っているのかという問題は, つい最近に至るまであまり顧みられることがなかった, というのが実情である.

球面上の 2 次元乱流が散逸していくときに角運動量分布がどうなるかという問題は, 近年 Yoden and Yamada (1993) によって数値実験により調べられた. 強制力が働いていないところが Williams (1978) とは異なるところであり, しかも, 系を無次元化することによりパラメタ依存性を系統的に調べたところがあるものを見やすくしている. 彼らの得た結果によれば, 無次元化された自転角速度が大きい時には, 統計的に中低緯度では西風(超回転), 極域で東風が現れる. 木星に対応すると考えられる自転角速度を与えても縞々にはならないのである. 以下では, 球面上のロスビー波伝搬の弱非線形理論を考察し, それによって予言される角運動量輸送傾向と Yoden and Yamada (1993) の実験結果との対応関係を検討してみる.

3 球面非発散 2 次元系とその性質

考察する系は半径 1 の非発散 2 次元球面系である:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\nu_4 \nabla^4 \zeta. \quad (1)$$

ただし, ψ は流線関数, $\zeta \equiv \nabla^2 \psi$: 渦度, λ は経度, ϕ は緯度, ∇^2 は球面上の 2 次元ラプラシアン, t は時刻, $\Omega \equiv \Omega^* a/U$ は無次元化された自転角速度, Ω^* は惑星自転角速度 (ここでは地球と同じ正の量としておく), a は惑星半径, U は適当な速度スケール, $\nu_4 = 10^{-6}$ は超粘性係数, である. Ω は地球で数十, 木星で 100 程度となる.

運動場を東西平均量 (一) とそれからのずれ (波の量, ') とにわけ, 波の量の振幅で展開する. 振幅の 1 次の式は

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \zeta'}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos \phi} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = -\nu_4 \nabla^4 \zeta'. \quad (2)$$

ただし

$$\hat{\beta} \equiv 2\Omega \cos \phi - \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi \bar{u}) \quad (3)$$

振幅の 2 次の式は角運動量の変化を与える. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} \cos \phi) - \overline{v' \zeta'} \cos \phi = \int^\phi d\phi \cos \phi \nu_4 \nabla^4 \bar{\zeta}. \quad (4)$$

一方, 振幅の 1 次の式に ζ' をかけて

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\zeta'^2} \cos \phi}{2 \hat{\beta}} + \cos \phi \overline{v' \zeta'} = -\nu_4 \frac{\overline{\zeta' \nabla^4 \zeta'}}{\hat{\beta}} \cos \phi \quad (5)$$

が得られる. したがって

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\cos \phi \overline{u^{(2)}} + \frac{\overline{\zeta'^2} \cos \phi}{2 \hat{\beta}} \right] = \int^\phi d\phi \cos \phi \nu_4 \nabla^4 \bar{\zeta} - \nu_4 \frac{\overline{\zeta' \nabla^4 \zeta'}}{\hat{\beta}} \cos \phi \quad (6)$$

これをもって

$$-\overline{\mathcal{A}} \equiv \frac{\overline{\zeta'^2} \cos \phi}{2 \hat{\beta}} \quad (7)$$

を1次の擾乱の持つ擬角運動量ということができる。散逸がなければ、時間積分を実行することにより、擾乱 ζ' の存在が角運動量 $-\overline{\mathcal{A}}$ の存在に直ちに対応することがわかる。 $-\int \overline{\mathcal{A}} dS$ は擾乱 ζ' を生成せしめるために系に加えなければならない角運動量に他ならない。また、擾乱の伝搬にともなって角運動量場には $-\overline{\mathcal{A}} < 0$ の程度の大きさの揺らぎが期待されることになる。東西流が緩やかで $\hat{\beta} \sim 2\Omega > 0$ である場合には $-\overline{\mathcal{A}} < 0$ であることに注意。擾乱は東風(西向き)運動量を持っていることになる。

WKBJ 近似を用いて1次の擾乱をロスビー波として記述することにしよう。波の量に関しては位相関数を導入し、緯度変化に比べ十分波長が短いとして

$$\omega = \overline{u}k - \frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2}, \quad (8)$$

となる。 ω は局所振動数、 k, l は局所波数の経度、緯度方向の成分、 \overline{u} は東西平均流である。伝播の特異点は $\omega = \overline{u}k$ にある。いわゆる臨界緯度である。波の擬角運動量 $-\overline{\mathcal{A}}$ の輸送とそれともなう角運動量分布の時間変化は、WKBJ 近似の範囲では、

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{A}}}{\partial t} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi C_{g\phi} \overline{\mathcal{A}}) = -\nu_4 \frac{\overline{\zeta' \nabla^4 \zeta'}}{\hat{\beta}} \cos \phi \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} \cos \phi = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi C_{g\phi} \bar{A}) + \text{散逸項} \quad (10)$$

となる。 $C_{g\phi}$ は群速度の南北方向成分である。

波を生成するためには $-\bar{A}$ の角運動量を加えてやらなければならない。もし外界から角運動量を加えてやることができないならば、波の射出域では波を射出した後に $-\bar{A}$ の角運動量が残されることになる。 $\beta > 0$ とすれば西風（東向き）の角運動量が残されることになる。散逸があつて $-\bar{A}$ が消滅していく領域では、波が運んできた東風の角運動量が溜っていくことになる。 $\omega = \bar{u}k$ となつて波動伝搬の特異点が発生する場合には、波の集中が発生し、東風角運動量の蓄積が起こることが予想される。

球面であることによる特色は次のようにまとめられる：

1. β は高緯度ほど小さく従つて位相速度も高緯度ほど小さくなり、同じ大きさの \bar{u} に対しては高緯度ほど特異点が発生しやすくなる。
2. やりとりされるものが角運動量であるので、 \bar{u} で見た揺らぎは高緯度ほど大きい。

したがつて、東風角運動量の蓄積は高緯度で起こりやすい。

4 球面非発散 2 次元系の計算結果に関する考察

これまで Yoden and Yamada (1993) が行なってきた実験は, $\Omega = 0 \sim 400$ について, 初期値をエネルギースペクトルが $E(n) \propto n^5 e^{-n/2}$, $\sum E(n) = 1$ となるように乱数で与え計算してきたものである. 初期値のエネルギー最大の波数は $n = 10$, 渦度最大の波数は $n = 14$ である. 角運動量分布に関する主な結果は, 初期値依存性は大きいものの, $\Omega > 100$ においては統計的に極域で東風領域が形成される, ということであった.

まず, Ω が十分大きければ $\hat{\beta} \sim 2\Omega \cos \phi$ であり, 初期に与えた ζ' の振幅は統計的に一様であるから $\overline{\mathcal{A}} \sim \overline{\zeta'^2}/4\Omega$ も統計的に球面上に一様に分布することになる. 実験での値を用いれば $\overline{\mathcal{A}} \sim 100/\Omega$ ということになる. 期待される角運動量の揺らぎは一様に分布して $100/\Omega$ 程度ということになる.

一方東風角運動量の集積をもたらす特異点の発生は $\bar{u} \sim \overline{\mathcal{A}}/\cos \phi \sim 2\Omega \cos \phi/(k^2 + l^2)$ で起こると期待される. $\overline{\mathcal{A}}$ に関する実験値を代入し, かつ, $k^2 + l^2$ として初期値の渦度最大を与える波数 14 を用いれば $\cos \phi \sim 100/\Omega$ を得る. すなわち, 期待される特異点発生 of 緯度は $\Omega < 100$ では至るところ, $\Omega = 200$ で 60° 以上の高緯度, $\Omega = 400$ で 76° 以上の高緯度となる.

以上のシナリオをチェックするために, 非線形系, すなわち,

方程式系 (1) で記述される系と, 弱非線形系, すなわち, 方程式系 (2), (4) で記述される系とを同じ初期値をあたえて時間積分してみた結果が図に示したものである. パラメーターは $\Omega = 400$ の場合である. 非線形系, 弱非線形系ともきれいに高緯度領域に東風ジェットが形成されており, 東風運動量の蓄積が弱非線形の範囲で説明できるものであることを示している.

結局 Yoden and Yamada (1993) の行なっていた実験の $\Omega > 100$ の場合はほとんど弱非線形領域でありあまり「乱流」ではなかったということになる. 分散関係を用いた先の議論にしがえば, ジェットの分布の Ω 依存性は初期値としてどのようなスペクトル分布を与えたかに大きく依存するはずである. 初期値のスペクトルピークが高波数にあればより大きな Ω に対しても縞々な分布が得られることになろう.

Williams (1978) では $\Omega = 100$ の場合に縞縞の \bar{u} を作り木星と称しているが, これも A とのかねあいにおいて議論すべきであろう. Ω が大きくても強制として系に加えているスペクトル分布が小さい波数のところにピークを持っていれば縞々にはならないことになる. Williams の議論は $\sqrt{\bar{u}/\beta}$ だけで片付けているのであるが, それではあまりに安直過ぎる.

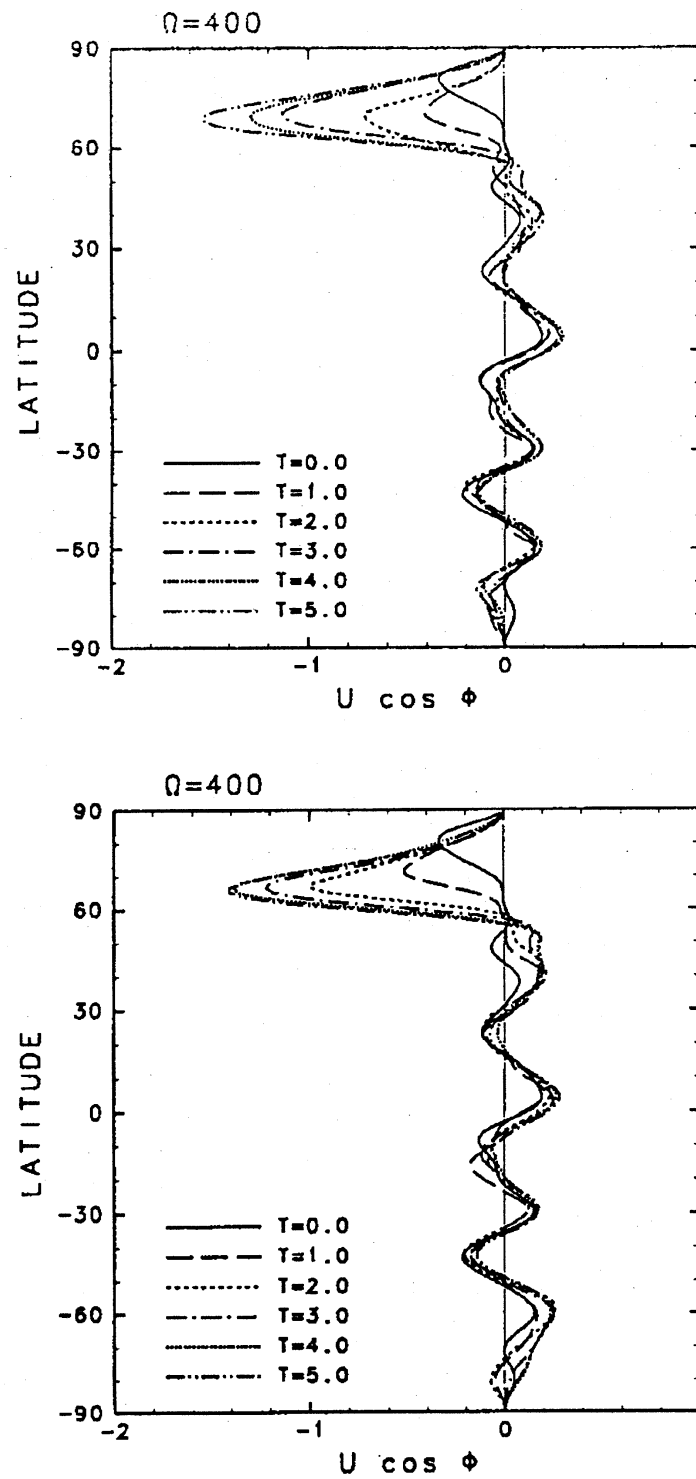


図 1: 同じ初期値から始めた非線形系 (上), 弱非線形系 (下) における角運動量分布の時間発展.

5 参考文献

Busse, 1983, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **23**, 153-174.

Yoden, S. and M. Yamada, 1993, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631-643.

Williams, G.P., 1978, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399-1426.

Wallace, J.M. and D.S. Gutzler, 1981, *Mon. Wea. Rev.*, **109**,
784-812.